VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS

En diversos campos de la matemática y la ingeniería surge el problema de calcular los valores escalares λ y los vectores $\vec{x} \neq 0$ de tal manera que para la matriz cuadrada A se verifica la ecuación vectorial $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Algunas aplicaciones se encuentran en ecuaciones diferenciales, estabilidad de sistemas lineales, sistemas eléctricos entre otros. La solución de la ecuación planteada se obtiene reescribiéndola en la forma

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

La cual tiene solución trivial si $Det(A - \lambda I) \neq 0$. Pero como el sistema debe tener soluciones no nulas, entonces se debe cumplir que $Det(A - \lambda I) = 0$

DEFINICION. Dada una matriz cuadrada A, el valor λ se denomina valor propio de la matriz, valor característico o eigenvalor si y solo si $Det(A - \lambda I) = 0$ donde I es la matriz identidad del mismo orden que la matriz A.

Al desarrollar el determinante $Det(A - \lambda I) = 0$ se obtienen una polinomio de λ cuyo grado es igual al or4den de la matriz, dicho polinomio se denomina polinomio característico. Al solucionar dicho polinomio encontramos los valores propios.

Ejemplo 1. Determine los valores propios o eigenvalores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Para encontrar los valores propios debemos resolver el polinomio que resulta de $Det(A - \lambda I) = 0$. Para ello tenemos que:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ luego

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante , tenemos

$$Det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(-3-\lambda) - 2(-5) = 0$$

$$-12 - 4\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 10 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Luego los valores propios son : $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$

Ejemplo 2 : Determine los valores propios de la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, para la matriz tenemos $i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

luego

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Y el determinante $Det(A - \lambda I) = 0$ nos queda

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)^2 + (-1)(-1-\lambda) - (-1(-1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

$$(1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$(1+\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda = -1; \lambda = -1$$

Ejercicio. Encuentre los eigenvalores de las matrices

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

PROPIEDADES DE LOS VALORES PROPIOS.

1. Si una matriz cuadrada A tiene n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_n$ entonces la suma de los valores propios es igual a la traza de la matriz. Es decir $Traza(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n$.

   En el ejemplo 1 vimos que la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ tiene como valores propios a $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$, ahora la traza de la matriz es igual a la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir

$Traza(A) = 4 + (-3) = 1$ y de acuerdo a la propiedad tenemos que $Traza(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 - 1 = 1$

2. Si una matriz cuadrada A tiene n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_n$ entonces el producto de los valores propios es igual al determinante de la matriz. Es decir $Det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Ejemplo: El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ es:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2$$

De acuerdo a la propiedad se tiene que :

$$Det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda 1 * \lambda_2 = 2(-1) = -2$$

3. Si una matriz cuadrada A es triangular superior, entonces los n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_n$ son iguales a los elementos de su diagonal.

Los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ son:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 0 & -3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$Det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(4-\lambda)(-3-\lambda)=0$$

$$(4-\lambda)=0 \rightarrow \lambda=4$$

$$(-3-\lambda)=0 \rightarrow \lambda=-3$$

Los cuales corresponden a los elementos de la diagonal principal.

4. Si una matriz cuadrada A tiene valores propios los números λ_i para $i=1,2,3,\ldots,n$, entonces para cualquier escalar α la matriz αA tiene como valores propios los números $\alpha\lambda_i$ para $i=1,2,3,\ldots,n$.

Ejemplo. Sea la matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y el escalar $\alpha=3$.

Los valores propios de la matriz A son:

$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ siendo

$$Det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda)-3=0$$

$$8-6\lambda+\lambda^2-3=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+5=0$$

$$(\lambda-5)(\lambda-1)=0$$

$$\lambda=5; \lambda=1$$

Ahora, los valores propios de la matriz $\alpha A = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ son

$\alpha A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 6-\lambda_1 & 3 \\ 9 & 12-\lambda_1 \end{pmatrix}$ siendo

$$Det(A-\lambda_1 I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda_1 & 3 \\ 9 & 12-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda_1)(12-\lambda_1) - 27 = 0$$

$$72 - 18\lambda_1 + \lambda_1^{\ 2} - 27 = 0$$

$$\lambda_1^{\ 2} - 18\lambda + 45 = 0$$

$$(\lambda_1 - 15)(\lambda_1 - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 15; \lambda_1 = 3$$

Como se puede observar los valores propios de la matriz αA son iguales a tres veces los valores propios de la matriz A

Es decir: $\lambda_1 = 15 = 3(5) = 3\lambda$, $\lambda_1 = 1 = 3(1) = 3\lambda$

5. Si una matriz cuadrada A tiene valores propios los números λ_i para $i = 1,2,3,\ldots,n$, entonces para cualquier escalar α la matriz $A - \alpha I$ tiene como valores propios los números $\lambda_i - \alpha$ para $i = 1,2,3,\ldots,n$.

Ejemplo. En el ejemplo de la propiedad anterior vimos que la matriz Sea la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ tiene como valores propios los escalares $\lambda = 5$ y $\lambda = 1$. Sea el escalar $\alpha = 2$.

Los valores propios de la matriz $A-\alpha I$ son:

$A-\alpha I = A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ si llamamos los valores propios δ tenemos que $(A-\alpha I)-\delta I = \begin{pmatrix} -\delta & 1 \\ 3 & 2-\delta \end{pmatrix}$

$$Det((A-\alpha I)-\delta I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\delta & 1 \\ 3 & 2-\delta \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\delta)(2-\delta)-3=0$$

$$-2\delta+\delta^2-3=0$$

$$\delta^2-2\delta-3=0$$

$$(\delta-3)(\delta+1)=0$$

$$\delta=3; \delta=-1$$

Vemos la propiedad se cumple ya que: $\delta=3=5-2=\lambda-\alpha$ y $\delta=-1=1-2=\lambda-\alpha$

6. Si una matriz cuadrada A tiene valores propios los números λ_i para $i=1,2,3,\ldots,n$, entonces para cualquier escalar m la matriz A^m tiene como valores propios las potencias de los valores propios de la matriz A, es decir λ_i^m para $i=1,2,3,\ldots,n$.

Ejemplo. En el ejemplo de la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ encontramos que los valores propios los escalares $\lambda=5$ y $\lambda=1$. Sea el escalar $m=2$.

Los valores propios de la matriz A^2 son:

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}$ si llamamos los valores propios δ tenemos que $A^2 - \delta I = \begin{pmatrix} 7-\delta & 6 \\ 18 & 19-\delta \end{pmatrix}$

$$Det\left(A^2 - \delta I\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7-\delta & 6 \\ 18 & 19-\delta \end{vmatrix} = 0$$

$$(7-\delta)(19-\delta) - 6*18 = 0$$

$$133 - 26\delta + \delta^2 - 108 = 0$$

$$\delta^2 - 26\delta + 25 = 0$$

$$(\delta - 25)(\delta - 1) = 0$$

$$\delta = 25; \delta = 1$$

Vemos la propiedad se cumple ya que: $\delta = 25 = 5^2 = \lambda^2$ y $\delta = 1 = 1^2 = \lambda^2$

DEFINICION. Los vectores no nulos que verifican la ecuación $\left(A - \lambda I\right)\vec{x} = \vec{0}$ se llaman vectores propios , autovectores o eigenvectores.

Ejemplo. Encontrar los vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Sabemos que los valores propios los escalares $\lambda = 5$ y $\lambda = 1$.

Debemos resolver el sistema lineal homogéneo $\left(A - \lambda I\right)\vec{x} = \vec{0}$

Para $\lambda = 5$, se tiene

$$\left(A-\lambda I\right)=A-5I=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Con lo que el sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-3x+y\\ 3x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ de donde $\begin{cases}-3x+y=0\\ 3x-y=0\end{cases}$ resolviendo el sistema por Gauss tenemos.

$$\left(\begin{array}{cc|c}-3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{array}\right)_{F2\leftrightarrow F2+F1}$$

$\left(\begin{array}{cc|c}-3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ LO QUE NOS IDICA QUE EL SITEMA TIENE INFINITAS SOLUCIONES

Y DE LA PRIMERA FILA TENEMOS $-3x+y=0$ lo que nos indica que $y=3x$, luego los vectores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 3x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix},x\neq 0$$

Para $\lambda=1$, se tiene

$$\left(A-\lambda I\right)=A-I=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

Con lo que el sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x+y \\ 3x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de donde $\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$ resolviendo el sistema por Gauss tenemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}_{F2 \leftrightarrow F2-3F1}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ LO QUE NOS IDICA QUE EL SITEMA TIENE INFINITAS SOLUCIONES

Y DE LA PRIMERA FILA TENEMOS $x+y=0$ lo que nos indica que $y=x$, luego los vectores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \neq 0$$

Ejemplo. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ indique cuales de los siguientes vectores son propios $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Miremos si existe un escalar λ que verifique la ecuación $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

Es decir para el vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene $Au = \lambda u$

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3u$$

Luego es vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Es decir para el vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se tiene $Av = \lambda v$

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Luego es vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ NO es un vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$